Actes de la IX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Grapí Vilumara, P.; Massa Esteve, M. R. (ed.) (2012) p. 61-72

L'ÚS DE LA GEOMETRIA DINÀMICA EN LA *DECONSTRUCCIÓ* DE LES FIGURES FONAMENTALS DE LA MATEMÀTICA XINESA ANTIGA

IOLANDA GUEVARA-CASANOVA;[1] CARLES PUIG-PLA[2]
[1] INS BADALONA VII I UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.
[2] UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: *matemàtiques xineses a l'antiguitat, Nou capítols sobre els procediments matemàtics, Liu Hui, procediment de la base i l'altura (gou gu), figures fonamentals, geometria dinàmica, GeoGebra*

Using dynamic geometry in the deconstruction of key figures of Ancient Chinese Mathematics

Summary: *Recent historical studies on the Nine Chapters on the Mathematical Art (Jiuzhang suanshu), a classic text of Ancient Chinese Mathematics, have allowed us to know better the underlying geometric reasoning in certain algorithmic procedures that were used in the resolution of problems linked to the administration of the imperial court.*

Although this classical text exemplifies the procedure with specific numerical values, it does not justify the proposed calculations to find the numerical solution of each problem. Later, the commentators add explanations to show that the algorithms are correct and can be used with other numbers.

The analysis of Nine Chapters on the Mathematical Art reflects the methodology used by commentators; they justify the algorithms using diagrams that have equivalent areas. This paper shows how through the construction of geometrical diagrams, the Chinese mathematicians obtained new diagrams with the same areas as the first ones. From these new diagrams we can read the solution of the problem.

Modern software of the 21st century, such as GeoGebra, allows us to see these procedures and helps the understanding of this ancient construction process. On the other hand, these new instrumental resources help the introduction of historical contexts in the teaching of mathematics.

Key words: *mathematics in ancient China, Nine Chapters on the Mathematical Art, Liu Hui, the procedure of the base and height (gou gu), key figures, dynamic geometry, GeoGebra*

Introducció

Els recents estudis historiogràfics dels *Jiuzhang suanshu* o *Nou capítols sobre els procediments matemàtics* (a partir d'ara *NC*), text clàssic de l'antiga matemàtica xinesa (segle I), han permès conèixer millor els raonaments geomètrics subjacents en determinats procediments algorítmics que van ser utilitzats en la resolució de problemes abordats per l'administració de la cort imperial. Els textos clàssics, si bé exemplificaven el procediment amb valors numèrics concrets, no justificaven els càlculs proposats per trobar la solució numèrica de cada problema. Van ser els comentaristes posteriors els que es van preocupar d'explicar perquè els algorismes de càlcul eren correctes i generals.

L'anàlisi dels *NC* permet mostrar la metodologia emprada pels comentaristes per justificar els algorismes de càlcul: recomposició de figures i conservació de les àrees. En aquest treball es mostra com a través de la construcció de figures geomètriques que es transformen i es recomponen, els matemàtics xinesos obtenien noves figures sobre les quals llegien directament la solució del problema.

Els programes actuals de geometria dinàmica, en particular el GeoGebra,[1] constitueixen una eina eficaç de cara a facilitar la comprensió d'aquests procediments matemàtics antics. Amb aquest recurs és possible, per exemple, visualitzar seqüències de transformacions de figures geomètriques subjacents a procediments algorítmics. L'estudi segueix la deconstrucció de tres figures fonamentals que apareixen en el capítol 9 del text esmentat i que són descrites per Liu Hui, al segle III, per justificar els algorismes originals. Així, es mostra fins a quin punt l'ús dels recursos instrumentals facilita la introducció de contextos històrics en l'ensenyament de la matemàtica.

Els autors dels procediments geomètrics

Al segle I dC es va compilar un text matemàtic d'enorme influència en la matemàtica xinesa, una obra que va ser objecte d'una important tradició de comentaris per part dels matemàtics xinesos als segles posteriors. Ens referim als *NC* una obra estudiada per diversos historiadors de la matemàtica oriental (Li, Du, 1987; Lam, 1994; Martzloff, 1997; Man-Keung, 2000; Chemla, Shuchun, 2005).

El fet que els *NC* fos considerat un clàssic (*jing*) i que nombrosos matemàtics posteriors en fessin referència ha fet que s'hagi comparat el paper que va desenvolupar aquesta obra a la Xina amb el que van exercir els *Elements* d'Euclides a l'Occident (Chemla, 1999: 76).

El primer testimoniatge que designa els *NC* com un clàssic és l'edició del text amb comentaris afegits que va dur a terme el matemàtic Liu Hui l'any 263. Més tard, l'any 656, el matemàtic Li Chunfeng va continuar aquesta tradició afegint-hi nous comentaris. L'objectiu dels comentaristes dels *NC* era mostrar el procediment que conduïa a trobar el valor de les respostes en el text clàssic. Es tractava de demos trar la correcció dels algorismes emprats en la resolució de problemes fent explícit cada pas, explicant el significat de les operacions realitzades per elaborar el resultat final i establint que aquest resultat correspon a la qüestió formulada. Malgrat que treballaven amb problemes concrets i aplicaven els algorismes a unes dades numèriques, sovint feien referència al procediment emprat més que a l'obtenció del resultat.

Apareix aquí un nou element de la pràctica matemàtica dels comentaristes, que són els auxiliars visuals. S'ha de remarcar que en el text del segle I no es feia cap referència a figures ni a cap altra forma de visualització. La idea de «demostració» subjacent en els comentaris dels *NC* difereix però considerablement del mètode axiomàtic deductiu dels *Elements* d'Euclides, que és per al món occidental el model per excel·lència de procediment demostratiu (Romero *et al.*, 2009).

1. http://www.geogebra.org (darrer accés: 30.11.11).

El procediment de la base i de l'altura

En l'edició de Chemla i Shuchun dels *NC* s'alterna el text clàssic amb els comentaris de Liu Hui i de Li Chunfeng. El text clàssic diu així:

> Base (*gou*) i altura (*gu*), si es multiplica cadascuna per ella mateixa, se sumen (els resultats) i es divideix per l'extracció de l'arrel quadrada, dóna la hipotenusa (Chemla & Shuchun, 2005: 705).

Després, el comentarista Liu Hui afegeix una petita introducció sobre el vocabulari:

> El costat més curt es diu base (*gou*); el costat més llarg, altura (*gu*); el que uneix les cantonades, una amb l'altra, es diu hipotenusa (*xian*) (Chemla & Shuchun, 2005: 707).

El paràgraf finalitza amb la justificació del procediment mitjançant la descripció de figures de colors que es descomponen i es recomponen a la manera de les peces d'un tangram:

> La base multiplicada per ella mateixa genera un quadrat vermell; l'altura per ella mateixa, un quadrat blau-verd, es fa de tal manera que es recomponen els uns amb els altres; partint del fet que es guarden tots els trossos, es genera per reunió l'àrea del quadrat de costat la hipotenusa. Dividint aquesta per l'extracció de l'arrel quadrada donarà la hipotenusa (Chemla & Shuchun, 2005: 705).

Els comentaris de Liu Hui i Li Chunfeng descriuen figures geomètriques que no apareixen en el text; les utilitzen per justificar els algorismes del text clàssic, a través del procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees. Diferents autors (Cullen, 1996: 206-220; Chemla & Shuchun, 2005: 879-894; Dauben, 2007: 187-384; Joseph, 1996: 249-260) opten per reconstruccions semblants, on, usant la terminologia actualment en ús, a és la base, b l'altura i c la hipotenusa. Aquestes figures geomètriques que no apareixen explícitament en el text però a les quals es fa referència en els comentaris, són les que s'han utilitzat per dissenyar les figures amb el GeoGebra. Primer en forma estàtica (Fig. 1), com es mostra a continuació, però també en forma d'animació com:

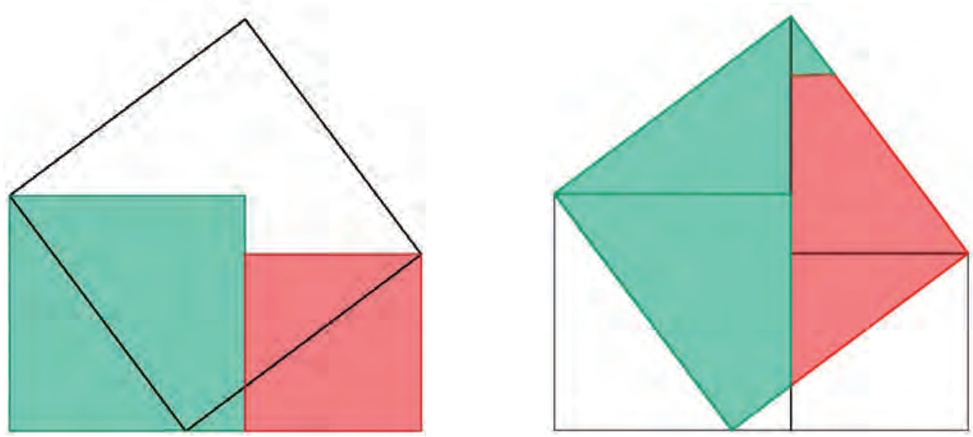


FIGURA 1. La reconstrucció del teorema amb peces de colors (Chemla & Shuchun, 2005: 680).

A continuació (Fig. 2) es mostren diferents moments de la reconstrucció utilitzant ara el GeoGebra dinàmic. El programa permet crear paràmetres que poden variar de valor, tant per al cas de mesures de longitud com d'angles, són els anomenats punts lliscants. Les escenes següents corresponen als segments de la part superior esquerra de la figura, sobre els quals apareixen els punts: ***a***, ***b*** i α. Observeu, per a cada escena, com varien els valors que mostren els punts citats i com repercuteix en la figura.

A través del punt lliscant α es faran girar els dos triangles inferiors que sobresurten del quadrat de traç intermitent.

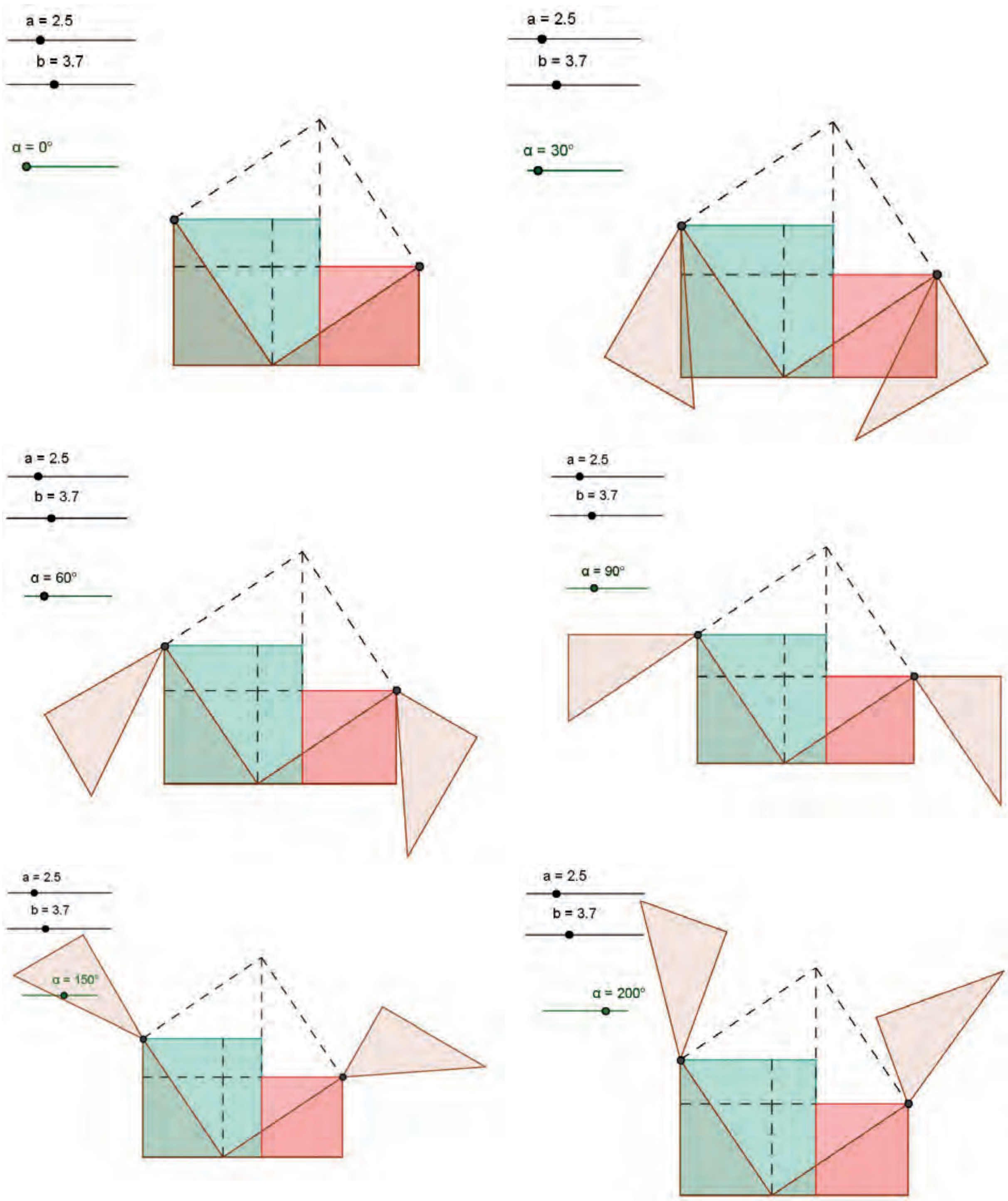


FIGURA 2. Les primeres seqüències de l'*applet* de GeoGebra que mostra el procediment Gou Gu.

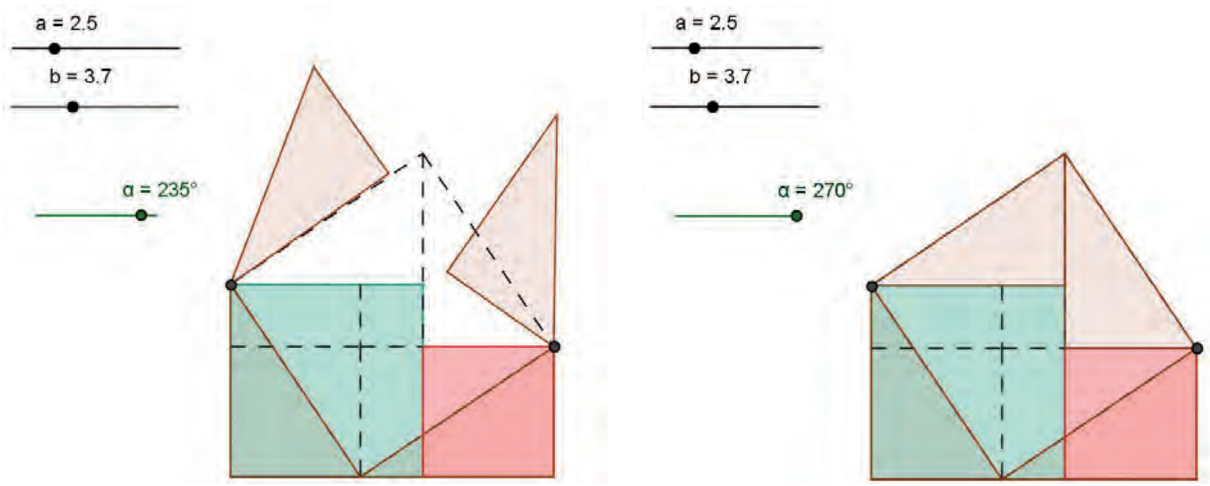


FIGURA 3. Les darreres seqüències de l'*applet* de GeoGebra que mostra el procediment Gou Gu.

Els punts lliscants ***a*** i ***b*** apareixen en totes les seqüències amb dos valors qualssevol fixos, en l'exemple ***a*** = 2,5 i ***b*** = 3,7. El punt lliscant ***a*** regeix la longitud del quadrat esquerre del diagrama, el que correspon al quadrat de l'altura del triangle rectangle; el punt lliscant ***b*** regeix la longitud del quadrat dret del diagrama, el que correspon al quadrat de la base. Si s'hagués modificat algun dels dos valors, ***a*** o ***b***, s'haurien modificat les dimensions corresponents del quadrat, però malgrat això el quadrat major continuaria sent recobert amb totes les peces en accionar el punt lliscant α, el que fa girar els triangles que es mouen. Així es demostra que, siguin les que siguin les dimensions dels dos quadrats inicials, el tercer quadrat es recobreix completament amb trossos dels altres dos i no en sobra res (Fig. 3).

En el text del capítol 9, els problemes 1, 2 i 3 estableixen el procediment de la base (*gou*) i de l'altura (*gu*). El primer problema narra com trobar la hipotenusa a partir de la base i l'altura; el segon, com trobar l'altura conegudes la hipotenusa i la base, i, finalment, el tercer, com trobar la base a partir de la hipotenusa i l'altura. En els tres casos amb nombres concrets, la terna (3, 4, 5). Els dos problemes següents utilitzen el procediment per resoldre dues situacions en les quals s'ha de calcular l'altura, a partir de la hipotenusa i la base (problema 4) amb dades una altra vegada numèriques —la terna (7, 24, 25)—, i la hipotenusa a partir de la base i l'altura (problema 5), ara amb la terna (20, 21, 29).

En els problemes següents es presenten situacions que porten a interpretar dades sobre un triangle rectangle però, llavors, la situació és una mica diferent. Malgrat que es demana un dels costats del triangle rectangle, les dades de partida no són els altres dos costats, sinó un d'ells i la diferència o la suma entre els costats que falten. Per resoldre-ho es requereixen uns nous diagrames, tres figures fonamentals.

Les figures fonamentals

Per justificar els algorismes de càlcul que s'utilitzen en la resolució dels problemes del 6 al 13 del capítol 9, els comentaristes Liu Hui i Li Chunfeng es recolzen en tres figures, que com en el cas de la justificació del *procediment gou gu*, no apareixen en el text. Aquestes figures han estat reconstruïdes pels historiadors que han estudiat el text amb posterioritat (Cullen, 1996: 206-220; Chemla & Shuchun, 2005: 879-894; Dauben, 2007: 187-384).

La primera figura fonamental

La primera figura fonamental és un quadrat de costat ***a+b*** (base i altura respectivament del triangle rectangle inicial), que conté en el seu interior el quadrat de costat ***c*** (hipotenusa del triangle). Aquest últim quadrat de costat ***c***, està disposat de tal forma que conté, al seu torn, quatre triangles rectangles ***a***, ***b***, ***c*** i un quadrat de costat ***b-a***.

Veiem la figura a continuació, com es construeix amb el GeoGebra i quina utilització se li dóna per resoldre els problemes del capítol 9 (Fig. 4).

A partir d'un triangle qualsevol, la primera figura fonamental té l'aspecte que es mostra a la figura 4. Observeu que el quadrat exterior té per costat ***a+b***, el petit quadrat interior té per costat ***b-a*** i el quadrat interior que no té la base horitzontal té per costat ***c***.

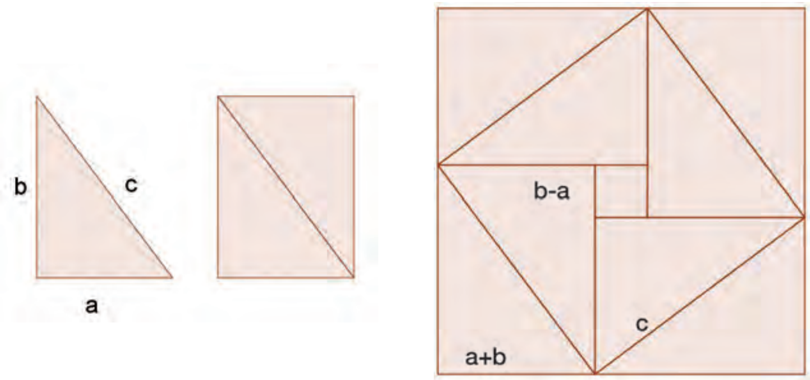


FIGURA 4. Del triangle a la primera figura fonamental.

A continuació es mostren diferents seqüències de la construcció amb GeoGebra (Fig. 5). Els punts lliscants, ***a*** i ***b***, romanen constants i iguals a 3 i 4 respectivament, són les mesures de la base i l'altura del triangle rectangle inicial. Els punts lliscants α i β són els encarregats de desplegar el rectangle (duplicat del triangle ***a***, ***b***, ***c***) fins a arribar a la primera figura fonamental.

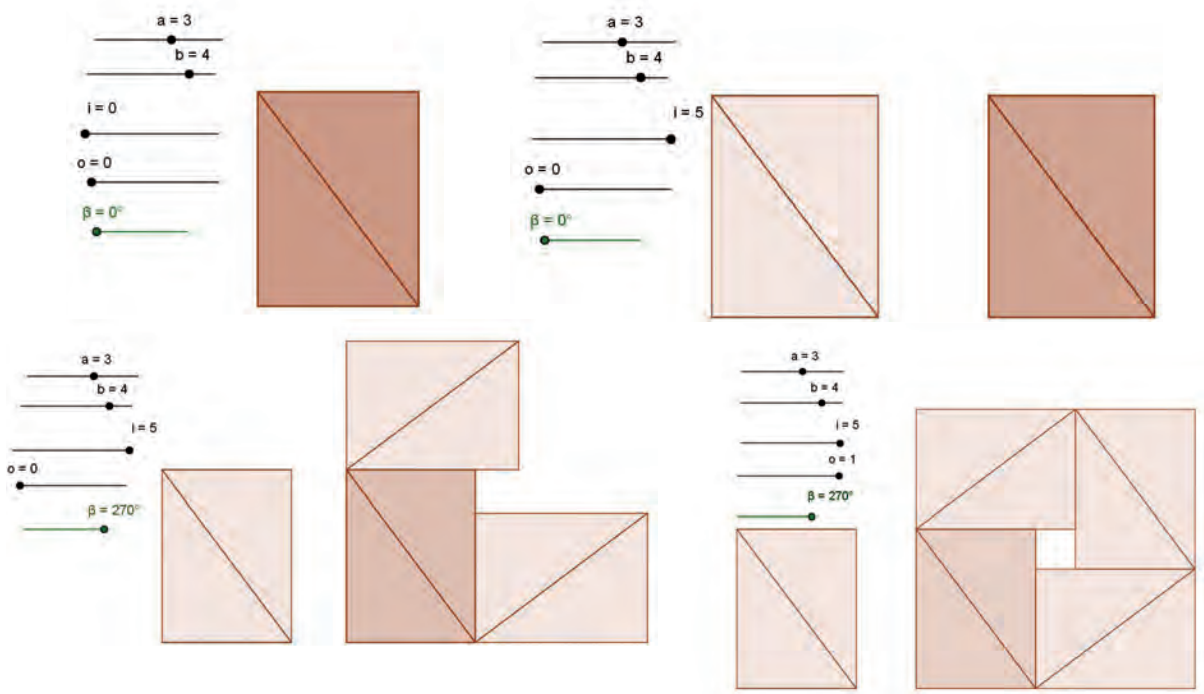


FIGURA 5. Diferents seqüències de l'*applet* de construcció de la primera figura fonamental.

Quins problemes se solucionen mitjançant la utilització d'aquesta figura? Es pot usar el GeoGebra per resoldre'ls? A continuació es mostra, a tall d'exemple, un dels problemes del capítol 11 mitjançant l'ús d'un *applet* elaborat amb GeoGebra.

El problema 11, una resolució amb la primera figura fonamental

L'enunciat del problema, segons el text clàssic original, diu:

> Suposem que tenim una porta d'un sol batent on l'altura sobrepassa l'amplària en 6 *chi* 8 *cun* i on dos angles oposats estan a una distància d'1 *zhang* l'un de l'altre.[2] Es demana quant valen l'amplària i l'altura de la porta.

La concreció de les dades que proposa Liu Hui és:

> L'amplària de la porta és la base (*gou*), l'altura de la porta és l'altura (*gu*), la distància entre els dos extrems, 1 *zhang*, la hipotenusa.

A continuació es mostren les dades en la notació actual i la figura corresponent (Fig. 6):

$b - a$ = 6 *chi* 8 *cun* = 68

c = 1 *zhang* = 100

$a = ?$

$b = ?$

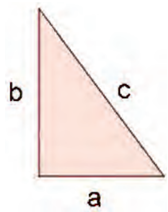


FIGURA 6. El triangle i les dades del problema 11.

L'algorisme de càlcul en el text clàssic:

> S'efectua la multiplicació d'1 *zhang* per ell mateix, això fa el dividend. Es pren la meitat del que un sobrepassa l'altre, s'efectua la multiplicació per ell mateix, es dobla això i es resta del dividend; es pren la meitat del que queda i es divideix això per l'extracció de l'arrel quadrada. Es resta del que s'obté la meitat del que un sobrepassava l'altre, i això dóna l'amplària de la porta; se suma la meitat del que un sobrepassava l'altre, això dóna l'altura de la porta.

Que en la notació simbòlica actual equivaldria a la seqüència d'operacions següents:

$100^2 = 10.000$

½ de 68 = 34

$34^2 = 1.156$

$1.156 \cdot 2 = 2.312$

2. *Zhang, chi* i *cun* són tres unitats de longitud, ordenades de major a menor, de base decimal, és a dir que 1 *zhang* equival a 10 *chi* i 1 *chi* a 10 *cun*.

10.000 – 2.312 = 7.688
7.688 : 2 = 3.844
√3.844 = 6.262 – ½ 68 = 62 – 34 = 28 = a
62 + 34 = 96 = b

Vegem com Liu Hui justifica aquests càlculs:

> El quadrat de la hipotenusa omple 10.000 *cun*. Quan ho doblem i li traiem el quadrat de la diferència entre la base i l'altura, i del resultat extraiem l'arrel quadrada, el que obtenim és la suma del valor de l'altura i l'amplària.

El procediment amb el GeoGebra:

> El punt lliscant, en anar variant de 0 a 5, regeix la seqüència de figures (d'elaboració pròpia) necessàries que descriu Liu Hui per resoldre el problema.

El quadrat de la hipotenusa omple 10.000 *cun* (Fig. 7):

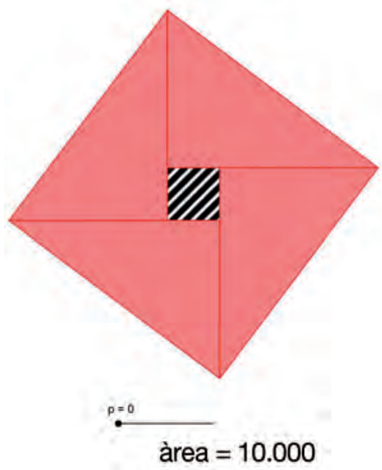


FIGURA 7. El quadrat d'àrea 10.000.

Es duplica el quadrat, es duplica l'àrea, de 10.000 a 20.000 (Fig. 8):

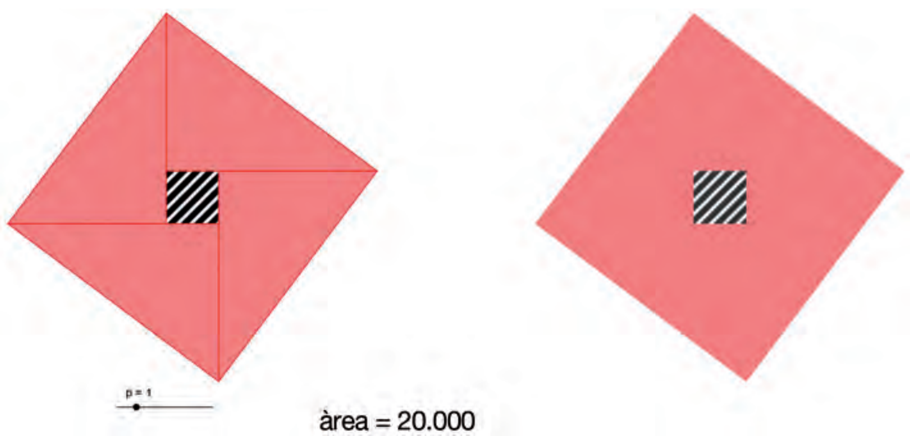


FIGURA 8. Els dos quadrats d'àrea = 20.000.

Li traiem el quadrat de la diferència entre la base i l'altura, l'àrea passa de 20.000 a 15.376 (Fig. 9), desapareix un quadrat interior d'una de les dues figures:

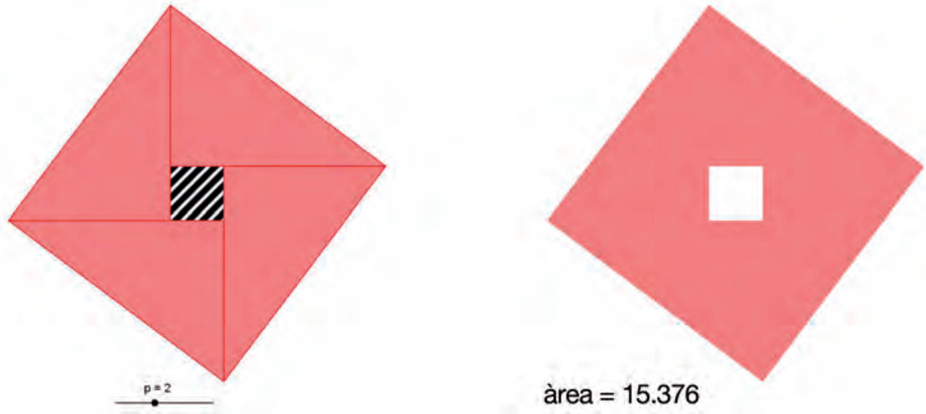


FIGURA 9. L'àrea 15.376.

El quadrat de la dreta es trosseja i passarà a ajuntar-se amb el quadrat de l'esquerra (Fig. 10).

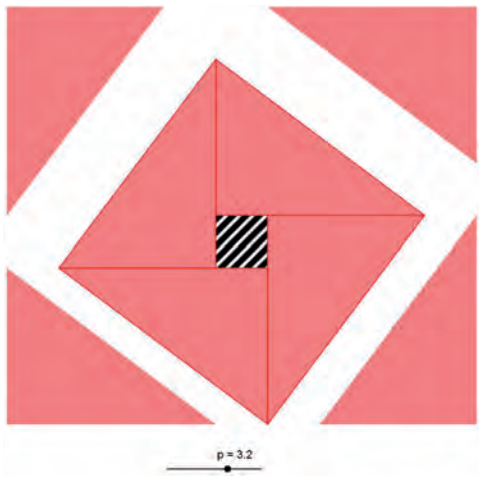


FIGURA 10. L'àrea 15.376.

Finalment, el quadrat inicial de costat ***c*** s'ha ampliat amb les peces sobreres del quadrat de la dreta del diagrama fins a donar lloc a un nou quadrat de costat ***a*** + ***b*** (Fig. 11).

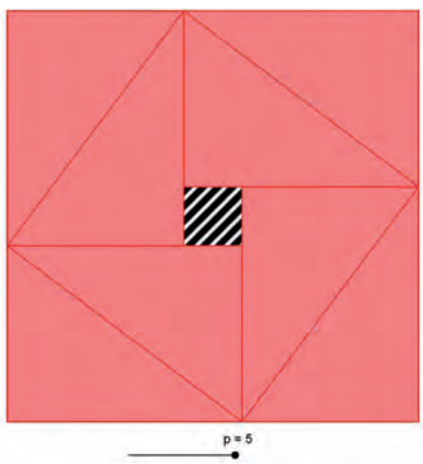


FIGURA 11. El quadrat d'àrea 15.376 i de costat = √15.376 = 124 = a + b.

Tenint en compte que ***b-a*** era una de les dades conegudes, l'obtenció de ***a+b*** resol el problema. Liu Hui conclou:

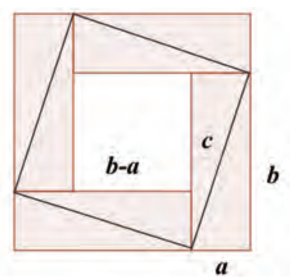
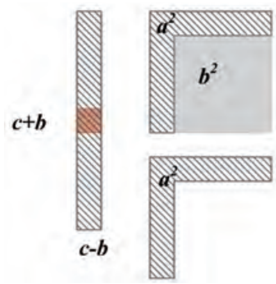
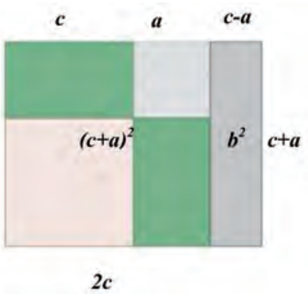
Si la diferència es resta de la suma i del que s'obté es fa la meitat, s'obté l'amplària de la porta; si a aquest valor se li afegeix la diferència entre altura i amplària, s'obté l'altura de la porta.

En notació actual:

$(a+b)-(b-a) = 2\,a$; així $\dfrac{(a+b)-(b-a)}{2} = a$ i també $a + (b-a) = b$

A més de la primera figura existeixen altres dues figures que relacionen un costat del triangle amb la suma o la diferència amb els altres dos.

El quadre següent recull els diferents casos i tots ells es poden reconstruir amb GeoGebra. Anàlogament, com en el problema 11, és possible dissenyar els *applets* per resoldre els problemes.

Figura	Nom / descripció	Procés de resolució
	*Primera figura* quadrat de costat ***a + b*** marcar ***a,*** a cada cara alternativament, i completar fins a obtenir el quadrat ***c***.	c, b – a → a + b → a, b
	*Segona figura* quadrat de costat ***c*** amb quadrat interior de costat ***b***, el gnòmon té àrea $\boldsymbol{a}^2$.	a, c – b → c + b → b, c
	*Tercera figura* quadrat de costat ***c + a*** amb rectangle adossat $\boldsymbol{b}^2$. La base del nou rectangle és ***2c***.	b, c + a → c, a

Consideracions finals

A mitjan segle III, els primers comentaristes dels *Nou capítols* tractaven de justificar i fer comprensible el significat dels algorismes del text clàssic. En els seus comentaris van introduir descripcions de figures que inicialment no estaven en els textos però que es van incorporar als segles següents. En aquesta comunicació, emulant als comentaristes del text clàssic, hem introduït un nou mètode per fer més comprensibles les figures descrites pels comentaristes: la utilització d'un programa de geometria dinàmica del segle XXI.

Ens hem centrat en l'últim dels *Nou capítols*. D'aquest hem triat alguns fragments especialment significatius per descriure tres escenaris: el del text clàssic, el dels comentaristes i el nou creat amb GeoGebra. D'aquesta manera, es pot veure l'evolució de diferents llenguatges, l'algorítmic, el narratiu, el diagramàtic (els comentaristes descrivien diagrames) i el geomètric dinàmic que aporta el programa utilitzat.

El programa de geometria dinàmica ens permet generar petits *applets* que es poden visualitzar a través de l'ordinador. En absència d'aquest, també és possible reconstruir els moviments de les figures mitjançant la impressió de seqüències successives extretes des del programa. D'aquesta manera es reconstrueix la idea subjacent en les justificacions dels comentaristes: a partir d'unes figures de les quals es coneixen les seves àrees, aquestes es fragmenten en peces menors (deconstrucció) i amb totes elles es construeixen altres figures amb àrees idèntiques a les inicials. Les figures així obtingudes permeten establir noves relacions entre les dades inicials i deduir valors fins llavors desconeguts.

Els *applets* descrits s'han utilitzat durant el curs 2011-2012 a l'INS Badalona VII, en el nivell de 3r d'ESO dins de la unitat didàctica «Pitàgores a Xina, o el procediment de resolució dels triangles rectangles».

Referències bibliogràfiques

CHEMLA, K. (1999), «Aperçu sur l'histoire des mathématiques en Chine Ancienne dans le contexte d'une histoire internationale», 71-90. Article en línia: http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seminaires/Resources/Chemla22.pdf (darrer accés: 30.11.11).

CHEMLA, K.; SHUCHUN, G. (eds.) (2005), *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* [edició crítica bilingüe], París, Dunod.

CULLEN, C. (1996), *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*, Cambridge/New York, Cambridge University Press.

DAUBEN, J. W. (2007), «Chinese Mathematics». A: KATZ, V. J. (ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam. A sourcebook*, Princeton University Press, 187-384.

JOSEPH, G. G. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Pirámide.

LAM, L. Y. (1994), «Jui Zhang Suanshu (*Nine Chapters on the Mathematical Art*): An Overview», *Archive for History of Exact Sciences*, **47**: 1, 1-51.

LI, Y.; DU, S. (1987), *Chinese Mathematics. A Concise History*, Oxford, Clarendon Press.

MAN-KEUNG, S. (2000), «An Excursion in Ancien Chinese Mathematics». A: KATZ, V. J. (ed.), *Using History to Teach Mathematics. An International Perspective*, Washington, The Mathematical Association of America, 159-166.

MARTZLOFF, J.-C. (1997), *A history of Chinese mathematics*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag.

ROMERO, F.; PUIG-PLA, C.; GUEVARA, I.; MASSA, M. R. (2009), «La trigonometria en els inicis de la matemàtica xinesa. Algunes idees per a treballar a l'aula», *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, **2** (1), 419-426.